III Familles sommables

III.A Questions de cours :

* Montrer que si D est dénombrable et D' est au plus dénombrable alors $D \cup D'$ est au plus dénombrable ?
* Montrer que $\mathbb{N}^2$ est dénombrable
* Montrer que le support d'une famille sommable est dénombrable.

III.B Exercices :

Exercice 1: *

Montrer, en utilisant le cours sur les familles sommables, que si $z, z' \in \mathbb{C}$, $e^{z+z'} = e^z e^{z'}$.

Exercice 2: **

On note $d(n)$ le nombre de diviseurs de $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} d(n)\mathrm{e}^{-n} = \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-p}}{1-\mathrm{e}^{-p}}.$$

Exercice 3: ***

Montrer que l'ensemble des points de discontinuités d'une fonction croissante de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est au plus dénombrable.
Indication : on pourra commencer par regarder le cas d'un segment.

Exercice 4: *

Étudier $\displaystyle\sum_{(p,q)\in\mathbb{N}^2} u_{p,q}$ où $\begin{cases} \text{si } p > q, & u_{p,q} = 0, \\ \forall p \in \mathbb{N}, & u_{p,p} = 1, \\ \text{si } p < q, & u_{p,q} = -\frac{1}{2^{q-p}}. \end{cases}$

Exercice 5: **** (Théorème de Mertens)**

On suppose que $\sum u_n$ est absolument convergente de somme S, et que (v_n) converge vers L où u et v désignent des suites complexes.

1. Montrer que $w_n = \sum_{k=0}^n u_k v_{n-k}$ tend vers LS.
2. Maintenant, on suppose $\sum u_n$ absolument convergente et $\sum v_n$ convergente, on note U et V leurs sommes. Montrer que $\sum w_n$ converge et que $\sum w_n = UV$. C'est le théorème de Mertens.

Exercice 6: *

Calculer la somme suivante en justifiant son existence : $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\sum_{k=n}^{+\infty} \frac{1}{k!}$

Exercice 7: **

On dit qu'un réel x est un **nombre algébrique** s'il existe $d \in \mathbb{N}^*$ et des entiers relatifs $a_0, \dots, a_d$ avec $a_d \neq 0$ tels que

$$a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0 = 0.$$

Le plus petit entier d vérifiant cette propriété est alors le **degré** de x.

1. Quels sont les nombres algébriques de degré 1 ?
2. Démontrer que l'ensemble des nombres algébriques de degré d est au plus dénombrable.
3. Démontrer que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable.

Exercice 8: *** (Formule de Wald)

Soit $(X_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires définies sur un même espace Ω identiquement distribuées à valeurs dans $\mathbb{N}$ et (admettant un moment d'ordre 1) ayant une espérance finie.
Soit N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ (admettant un moment d'ordre 1) ayant une espérance finie.
On suppose que $(N, X_1, \dots, X_n, \dots)$ sont mutuellement indépendantes et on note $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$.
Montrer

$$\mathbb{E}(S_N) = \mathbb{E}(X_1)\mathbb{E}(N).$$

Exercice 9: *

Démontrer l'existence et calculer $\sum_{(p,q) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*} \frac{1}{(p+q^2)(p+q^2+1)}$.
Indication : Procéder par décomposition en éléments simples.

Exercice 10: *

Étudier la sommabilité de la famille $\frac{(-1)^p}{q^p}$ où $p, q \geqslant 2$.